Schwingungen:

Allgemeines:

$\omega = 2\cdot\pi\cdot f$

$f = \frac{1}{T}$

Glossary:

m ... Masse
D ... Federkonstante
k ... Reibungskoeffizient
σ ... Dämpfungskonstante
A ... Amplitude

a) Die freie Schwingung

Charakteristische Gleichung

$$m\cdot\lambda^2 + k\cdot\lambda + D = 0$$

$\sigma = \frac{k}{2m}$ Dämpfungskonstante

$\Omega_0^{\,2} = \frac{D}{m}$ Kreisfrequenz des ungedämpft schwingenden Systems

$$\lambda_1 = -\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \Omega_0^{\,2}}$$

$$\lambda_2 = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \Omega_0^{\,2}}$$

Lösungen der quadratischen Gleichung für die charakteristische Größe λ.

Mögliche Lösungen:

$\sigma = 0$	ungedämpfte Schwingung
$0 < \sigma < \Omega_0$	gedämpfte Schwingung
$\sigma = \Omega_0$	aperiodischer Grenzfall
$\sigma > \Omega_0$	aperiodischer Kriechfall

Für die gedämpfte Schwingung wird -1 aus der Wurzel herausgehoben und folgende zusammenfassung getroffen:

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^{\,2} - \sigma^2}$$

$$x = A e^{\lambda \cdot t} \quad ==> \quad \begin{aligned} x_1 &= A \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot t} \\ x_2 &= A \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot t} \end{aligned}$$

$$x = e^{-\sigma \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right)$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedinungen zum Zeitpunkt t = 0 folgt:

$x(0) = x_{max}$ Auslenkung zum Zeitpunkt 0

$\frac{d}{dt} x = 0$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} x_{max} &= C_1 \\ 0 &= -\sigma \cdot C_1 + C_2 \cdot \Omega \end{aligned} \quad ==> \quad \begin{aligned} C_1 &= x_{max} \\ C_2 &= \frac{\sigma \cdot x_{max}}{\Omega} \end{aligned}$$

$$x(t) = x_{max} \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \left(\cos(\Omega \cdot t) + \frac{\sigma}{\Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right)$$

endgültige Gleichung für die gedämpfte Schwingung

Anmerkungen:

b) Die erzwungene Schwingung:

Anregung der Schwinung mit der Kraft

$$F = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Dies führt zu der Differentialgleichtung

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x + k \cdot \frac{d}{dt} x + D \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Nach dem Einschwingvorgang stellt sich eine stationäre Schwingung der Masse um ihre Ruhelage ein, die durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t - \phi)$$

Herleitung der **Amplitude** und des **Phasenwinkels** in Abhängigkeit von der Kreisfrequens siehe Skriptum Beispiel S05.

$$\cos(\phi) = \frac{D - m \cdot \omega^2}{\sqrt{k^2 \cdot \omega^2 + \left(D - m \cdot \omega^2\right)^2}}$$

Phasenwinkel

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{k^2 \cdot \omega^2 + \left(D - m \cdot \omega^2\right)^2}}$$

Amplitude

Kinetische Energie der Masse m:

$$E_{kin} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)^2$$

$$E_{gemittelt} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2}$$

Über einer vollen Periodedauer gemittelte kinetische Energie.

Herleitung der **Reibungsleistung** siehe Skriptum Beispiel S03:

$$P_R = \frac{k \cdot \omega^2 \cdot A^2}{2}$$

c) Überlagerung von ungedämpften Schwingungen

Sonderfall 1:

- Parallele Schwingungsrichtungen (x)
- Gleiche Frequenzen $f_1 = f_2 = f$
- Unterschiedliche Amplituden A_1 und A_2
- Unterschiedliche Phasenwinkel ϕ_1 und ϕ_2

$$x_1 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_2)$$

Die Überlagerung (Superposition) der beiden Schwingungen gibt Anlass zu einer resultierenden Schwingung

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

Weitere Herleitungen siehe Skriptum Beispiel S05:

$$A = \sqrt{(A_1)^2 + (A_2)^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{A_1 \cdot \sin(\phi_1) + A_2 \cdot \sin(\phi_2)}{A_1 \cdot \cos(\phi_1) + A_2 \cdot \cos(\phi_2)}$$

Sonderfall 2:

- Parallele Schwingungsrichtungen (x)
- Unterschiedliche Frequenzen $f_1,\ f_2$
- Unterschiedliche Amplituden A_1 und A_2
- Phasenwinkel $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$x_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \qquad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$x_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

Herleitung siehe Skriptum Seite 79:

$$x = (A_1 + A_2) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t) + (A_2 - A_1) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\Delta\omega \cdot t)$$

$$\Delta T = \frac{1}{\Delta f} = \frac{2}{f_1 - f_2} \qquad T_{Schwebung} = \frac{\Delta T}{2} = \frac{1}{f_2 - f_2}$$

Sonderfall 3:

- Senkrechte Schwingungsrichtungen x,y
- Gleiche Kreisfrequenzen $\omega_1 = \omega_2 = \omega$
- Unterschiedliche Amplituden A_1 und A_2
- Unterschiedliche Phasenwinkel $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = \phi$

$$x = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega \cdot t) \qquad \frac{y}{A_2} = \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) - \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi)$$

Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen x und y:

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cdot \cos(\phi) - \sin(\phi) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2}$$